

Hőtan és folytonos közegek mechanikája 9. gyakorlat

Szükséges előismeretek: I. főtétel; izochor, izobár, izoterm folyamatok; adiabata folyamat; hőkapacitás; politrop folyamat

1. feladat

Három mól anyagmennyiségű, szobahőmérsékletű ($T_1 = 20\text{ °C}$), atmoszferikus nyomású ($p_1 = 10^5\text{ Pa}$), egyatomos, ideális gázt izochor (izobár) módon $T_2 = 100\text{ °C}$ fokosra melegítünk.

- Ábrázoljuk a folyamatokat a $p - V$ síkon!
- Mennyi hőt kellett közölnünk a gázokkal?
- Mennyi a folyamatokhoz tartozó hőkapacitások értéke?

Megoldás: Ebben a feladatsorban a feladatokat az I. főtétel segítségével tudjuk megoldani. Az I. főtétel az energiamegmaradás törvénye a termodinamikai rendszerek esetében:

$$\Delta U = Q + W.$$

Egy termodinamikai rendszer belső energiája külső hőközlés vagy munkavégzés miatt változhat meg. A feladatsorban kvázistatikus folyamatokat fogunk tekinteni, ahol a folyamat bármelyik pillanatában egyensúlyban van a rendszer, azaz használhatóak a p , T , V állapotjelzők. Az I. főtételt leggyakrabban a Q hő meghatározására használjuk, mert a másik két mennyiség ΔU és W más módon is megkapható. ΔU a belső energia megváltozása, mely csak a kezdő és a végállapottól függ. Azaz, egy adott folyamat esetén elég a kezdő és végállapotban kiszámolni a belső energia értékét és ezeket kivonva egymásból megkapjuk a változást. A munkavégzés a $p - V$ grafikonon a görbe alatti területből határozható meg. Mely általánosan az alábbi integrállal írható fel:

$$W = - \int p(V) dV.$$

Ha a gáz kitágul, azaz a folyamat $p - V$ síkon balról-jobbra halad, akkor a W értéke negatív. Ez azt jelenti, hogy a gáz végzi a munkát, így a környezet munkavégzése negatív. Ha a gáz összenyomódik, akkor W értéke pozitív, és a környezet végez munkát a gázon. Az itt leírt állítások általános érvényűek, azaz nem csak ideális gázra, hanem tetszőleges termodinamikai rendszerre is igazak. Az első négy feladatban ideális gázra fogjuk alkalmazni az I. főtételt. Az utolsó feladatban és a beadandó 1. feladatában más termodinamikai rendszereket fogunk tekinteni.

A feladatban lévő gáz kezdeti térfogata

$$V_1 = \frac{nRT}{p_1} = \frac{3\text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 293\text{ K}}{10^5\text{ Pa}} = 73\text{ dm}^3.$$

Először az izochor folyamatot tekintjük. Ilyenkor a gáz térfogata végig konstans. A végállapotbeli nyomás a Gay-Lussac törvény alapján kapható meg:

$$\frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2} \rightarrow p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{373}{293} 10^5\text{ Pa} = 1,3 \cdot 10^5\text{ Pa}.$$

A folyamat $p - V$ síkon egy függőleges szakasszal reprezentálható. (Lásd: https://en.wikipedia.org/wiki/Isochoric_process) A végzett munka nulla, hiszen a görbe alatti rész egy szakasz, melynek nulla a területe. A belső energia megváltozása

$$\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T = \frac{3}{2} 3\text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 80\text{ K} = 3\text{ kJ}.$$

Az I. főtétel alapján a közölt hő értéke $Q = 3 \text{ kJ}$. A hőkapacitás a közölt hő és a hőmérsékletváltozás hányadosa:

$$C = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{f}{2}nR = \frac{3}{2}3 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 37,4 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

A második esetben az izobár tágulást tekintjük. Ilyenkor a végállapotbeli térfogatot a Gay-Lussac törvény segítségével számolhatjuk ki:

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2} \rightarrow V_2 = \frac{T_2}{T_1}V_1 = \frac{373}{293}73 \text{ dm}^3 = 93 \text{ dm}^3.$$

A folyamat $p - V$ síkon egy jobbra haladó vízszintes irányított szakasszal reprezentálható. (Lásd: https://en.wikipedia.org/wiki/Isobaric_process). A belső energia változás ΔU megegyezik az előző részben számolttal, mert a hőmérsékletváltozás a két esetben ugyanaz. Így $\Delta U = 3 \text{ kJ}$. A munka végzés a görbe alatti területtel egyezik meg. A gáz kitágul, így W értéke negatív

$$W = -p_1(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1) = -nR\Delta T = -3 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 80 \text{ K} = -2 \text{ kJ}.$$

A közölt hő az I. főtétel szerint

$$Q = \Delta U - W = \frac{f+2}{2}nR\Delta T = 5 \text{ kJ}.$$

A hőkapacitás értéke:

$$C = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{f+2}{2}nR = \frac{5}{2}3 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 62 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Látható, hogy ennél a két folyamatnál a hőkapacitás értéke független a kezdő és végponttól. Minden izochor és izobár folyamat esetén egy konstans érték a hőkapacitás, mely izochor folyamatoknál $\frac{f}{2}nR$, míg izobár folyamatoknál $\frac{f+2}{2}nR$.

2. feladat

Egy mól, egyatomos, ideális gázzal $T = 300 \text{ K}$ hőmérsékleten izoterm folyamatot végzünk. A folyamat kezdetekor a gáz nyomása $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, a folyamat végén pedig $p_2 = 10^5 \text{ Pa}$.

- Ábrázoljuk a folyamatot a $p - V$ síkon!
- Mennyi munkát végzett a gáz?

Megoldás:

Izoterm folyamatokat $p - V$ síkon egy hiperbola reprezentálja, melynek egyenlete

$$p(V) = \frac{nRT}{V}.$$

Ilyen görbét a https://en.wikipedia.org/wiki/Isothermal_process oldalon láthatsz.

A gáz kezdeti térfogatát az állapotegyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$V_1 = \frac{nRT}{p_1} = \frac{1 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K}}{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 12,5 \text{ dm}^3.$$

Végállapotban a gáz térfogata a Boyle-Mariotte-törvény alapján: $p_1V_1 = p_2V_2 \rightarrow V_2 = 2V_1 = 25 \text{ dm}^3$. A folyamat során a gáz kétszeres térfogatúvá tágul ki.

Izoterm folyamatok esetén a belső energia változás nulla, mert a hőmérséklet nem változik meg. $\Delta U = nR\Delta T = 0$, ha $\Delta T = 0$. Így az I. főtétel alapján $Q = -W$. Mivel a gáz kitágul, így a gáz végzi a munkát, vagyis $W < 0$. A munka a $p - V$ síkon a görbe alatti területből olvasható ki:

$$W = - \int p(V)dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = 1 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K} \ln 2 = -1,7 \text{ kJ}.$$

A gáz 1,7 kJ munkát végez, így a folyamat során 1,7 kJ hőenergiát kell közölnünk a gázzal. Izoterm folyamatok esetén a hőkapacitást nem tudjuk értelmezni, mert hőközlés hatására nem változik meg a gáz hőmérséklete, így a $\frac{Q}{\Delta T}$ hányados nem értelmezhető.

3. feladat

100 kPa nyomású, 0,5 mol egyatomos ideális gázt a kezdeti 10 dm³-es térfogatának felére összenyomunk egy $m = 2$ -es politrop folyamat során. A politrop folyamat esetén $pV^m = \text{állandó}$.

- Mennyi a folyamat végén a gáz nyomása?
- Mennyi munkát végeztünk az összenyomás során?
- Mennyi a hőcsere a környezet és a rendszer között? A hőt közölni vagy elvezetni kell?

Megoldás: A kezdeti térfogat $V_1 = 10 \text{ dm}^3$ felére $V_2 = 5 \text{ dm}^3$ nyomjuk össze a gázt. A kezdeti nyomás $p_1 = 100 \text{ kPa}$. A folyamat során a pV^2 szorzat állandó, ahol az állandó értéke $p_1V_1^2$. Ez nem egy izoterm, izobár vagy izochor folyamat. Ez egy olyan folyamat, melyet a $p - V$ síkon a

$$p(V) = \frac{p_1V_1^2}{V^2}$$

görbe ír le. A végállapotbeli állapotjelzőkre is felírva az állandó értékét: $p_1V_1^2 = p_2V_2^2$, ahonnan $p_2 = 4p_1 = 400 \text{ kPa}$.

A munkát a $p - V$ síkon a görbe alatti területből határozhatjuk meg. A gázt összenyomjuk, tehát a W értéke pozitív.

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1^2}{V^2} dV = p_1V_1^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = 1 \text{ kJ}.$$

A belső energia megváltozása

$$\Delta U = \frac{f}{2} (nRT_2 - nRT_1) = \frac{f}{2} (p_2V_2 - p_1V_1) = 1,5 \text{ kJ}.$$

A hőcsere a rendszer és a környezet között $Q = \Delta U - W = 500 \text{ J}$. $Q > 0$ így a hőt közölnünk kell.

4. feladat

Melyek azok a folyamatok ideális gáz esetében, melyek során a hőkapacitás állandó? Melyik folyamat során nulla a hőkapacitás értéke?

Megoldás: A kiindulási egyenletünk az I. főtétel: $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$. A belső energia változás ideális gáz esetén: $\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T$. A végzett munka differenciális alakja $\Delta W = -p\Delta V$. Olyan folyamatokat keresünk, ahol a hőkapacitás C állandó, azaz a hőközlés és a hőközlés hatására bekövetkezett hőmérséklet változás között az alábbi kapcsolat áll fenn: $\Delta Q = C\Delta T$. A kérdésünk, hogy ez a feltétel, milyen állapotváltozásokat enged meg? Hogyan néznek ki ezeknek a folyamatoknak a görbéi a $p - V$ síkon?

A kapott összefüggéseket behelyettesítve az I. főtétel alakjába:

$$\frac{f}{2}nR\Delta T = C\Delta T - p\Delta V.$$

Ideális gáz állapotegyenletét $p = \frac{nRT}{V}$ behelyettesítve egy szétválasztható változójú differenciálegyenletre jutunk:

$$\frac{f}{2}nR\Delta T = C\Delta T - \frac{nRT}{V}\Delta V \quad (1)$$

$$\frac{nRT}{V}\Delta V = \left[C - \frac{f}{2}nR \right] \Delta T \quad (2)$$

$$\frac{nR}{C - \frac{f}{2}nR} \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T} \quad (3)$$

$$(1 - m) \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}. \quad (4)$$

A számolás során bevezettük az $(1 - m) = \frac{nR}{C - \frac{f}{2}nR}$ jelölést, melyet átrendezve

$$C = \frac{f}{2}nR + \frac{nR}{1 - m}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát integrálva:

$$(1 - m) \ln V = \ln T + \text{konstans}$$

$$\ln(TV^{m-1}) = \text{konstans},$$

amiből adódik, hogy TV^{m-1} értéke konstans. Behelyettesítve az állapotegyenletet $\frac{pV}{nR}V^{m-1} = \text{konstans}$ egyenletet kapjuk, amiből az adódik, hogy azokra a folyamatokra állandó a hőkapacitás értéke, ahol pV^m állandó. Ezeket a folyamatokat politrop folyamatoknak nevezzük. Speciális m értékek esetén visszakapathatjuk a jól ismert, nevezetes folyamatokat.

Izobár: $m = 0$, így ilyenkor $p =$ állandó. A hőkapacitás értékére $C = \frac{f+2}{2}nR$ adódik.

Izoterm: $m = 1$, így ilyenkor $T =$ állandó. A hőkapacitást ilyenkor nem tudjuk értelmezni.

Izochor: $m = \infty$, így ilyenkor $V =$ állandó. A hőkapacitás értékére $C = \frac{f}{2}nR$ adódik.

Adiabata: $m = \frac{f+2}{f}$, ilyenkor a hőkapacitás értéke nulla. Tehát nincs a rendszer és a környezete között hőcsere, de a gáznak változik a hőmérséklete.

5. feladat

Határozzuk meg az adiabatikus folyamat egyenletét Van der Waals-gázra!

Megoldás:

A kiindulási egyenletünk az I. főtétel: $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$. Adiabatikus folyamatok során nincs a környezet és a rendszer között hőcsere, azaz $\Delta Q = 0$. A belső energia függvény reális gázok esetén:

$$U = \frac{f}{2}nRT - \frac{an^2}{V}.$$

Írjuk fel ennek teljes differenciálját:

$$\Delta U(T, V) = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \Delta T + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T \Delta V,$$

$$\Delta U = \frac{f}{2}nR\Delta T + \frac{an^2}{V^2}\Delta V.$$

Kvázistatikus folyamatok esetén a munka a $p - V$ görbe alatti területe, azaz differenciális alakban $\Delta W = -p\Delta V$. Behelyettesítve a reális gázok állapotegyenletét: $\Delta W = -\left(\frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}\right)\Delta V$.

Adiabatikus folyamatok esetén $\Delta U = \Delta W$, azaz behelyettesítve a kiszámolt alakokat:

$$\frac{f}{2}nR\Delta T + \frac{an^2}{V^2}\Delta V = -\left(\frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}\right)\Delta V \quad (5)$$

$$\frac{f}{2}nR\Delta T = -\frac{nRT}{V-nb}\Delta V \quad (6)$$

$$\frac{f}{2}\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta V}{V-nb}. \quad (7)$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezetett a probléma, melyet mindkét oldal felintegrálásával oldhatunk meg:

$$\frac{f}{2}\ln T = -\ln(V-nb) + \text{konstans} \quad (8)$$

$$\ln\left(T^{\frac{f}{2}}(V-nb)\right) = \text{konstans} \quad (9)$$

$$T^{\frac{f}{2}}(V-nb) = e^{\text{konstans}} = \text{konstans} \quad (10)$$

A reális gázok adiabatikus folyamatának egyenlete $T^{\frac{f}{2}}(V-nb) = \text{konstans}$. Látható, hogy $b \rightarrow 0$ esetben visszakapjuk az ideális gáz esetét, hiszen olyankor az adiabata folyamat egyenlete $T^{\frac{f}{2}}V = \text{konstans}$.