

# Hőtan és folytonos közegek mechanikája 8. gyakorlat

*Szükséges előismeretek:* Ideális gáz belső energiája, Gay-Lussac kísérlet, ekvipartíció tétele, reális gázok

## Órai feladatok:

### 1. feladat

Becsüljük meg egy tanteremben lévő gáz belső energiáját! Mennyi ideig lehetne ennyi energiával egy 100 W-os égőt működtetni?

### Megoldás:

Tekintsünk egy  $V=600 \text{ m}^3$ -es légterű tantermet, melyben normál légköri nyomás  $p=100 \text{ kPa}$  és  $T=24 \text{ }^\circ\text{C}=297 \text{ K}$  hőmérséklet van. Egy ilyen teremben az ideális gáztörvény alapján

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{100 \text{ kPa} \cdot 600 \text{ m}^3}{8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 297 \text{ K}} = 24 \text{ kmol}$$

anyagmennyiségű levegő található. Az ideális gáz belső energiáját az  $U = \frac{f}{2}nRT$  összefüggés adja meg, ahol  $f$  a szabadsági fokok száma. Egyatomos gázra  $f=3$ , kétatomos gázra  $f=5$ , bonyolultabb molekulákra táblázatból kell kikeresni az értéket. A levegő túlnyomó többségben kétatomos molekulákat tartalmaz, így jó közelítéssel  $f = 5$ . A belső energia értéke:

$$U = \frac{5}{2}24 \text{ kmol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 297 \text{ K} = 148 \text{ MJ}.$$

Ekkora energiával

$$t = \frac{148 \text{ MJ}}{100 \text{ W}} = 1,48 \cdot 10^6 \text{ s} = 17 \text{ napig}$$

lehetne működtetni egy 100 W-os izzót.

### 2. feladat

Hogyan változik meg egy tanteremben található gáz belső energiája, ha a hőmérsékletet  $T_1$ -ről  $T_2$ -re növeljük?

### Megoldás:

Miközben megváltoztatjuk a levegő hőmérsékletét (például a fűtés bekapcsolásával) a terem térfogata nem változik meg, és a teremben a nyomás is állandó marad. A terem nincs hermetikusan elzárva a környezetétől, így ott állandó normál légköri nyomás van. A teremben lévő gáz belső energiáját az

$$U = \frac{f}{2}nRT = \frac{f}{2}pV$$

képlet adja meg. A nyomás és térfogat sem változik, így a teremben lévő gáz belső energiája állandó marad. Hogyan lehetséges ez? Mi lesz a fűtőtest által leadott hővel? A melegítés hatására a gáz kitágul, így a gáz egy része kimegy a teremből. A fűtőtest által leadott hő éppen megegyezik a kiment gáz belső energiájával. Érdekes módon a fűtés bekapcsolásával a környezet belső energiáját növeljük, miközben a tanteremben lévő gáz belső energiája változatlan marad.

### 3. feladat

Fallal két részre osztott, tökéletesen hőszigetelt tartály két részében azonos anyagi minőségű egyatomos ideális gáz található, állapotjelzőik értékei  $p_1; V_1; T_1$  és  $p_2; V_2; T_2$ , anyagmennyiségük  $n_1$  és  $n_2$ .

a) A tartály két részét elválasztó fal kihúzása után kialakuló új egyensúlyi helyzetben mekkora lesz a gáz hőmérséklete és nyomása?

b) Hogyan változik a hőmérséklet a Gay-Lussac kísérletben? Gay-Lussac kísérletben az egyik oldalon vákuum van és abba tágul ki a gáz.

**Megoldás:**

a) A tartály hőszigetelt, így a gázok teljesen el vannak zárva a környezettől. A folyamat során a rendszer teljes belső energiája nem változhat meg. A tartályban egy kiegyenlítődési folyamat indul meg, melynek végén az intenzív állapotjelzők (nyomás, hőmérséklet) azonos értéket vesznek fel, melyeket jelölje  $p$  és  $T$ . Az extenzív állapotjelzők (térfogat, anyagmennyiség) egyszerűen összeadódnak. A belső energia állandósága miatt:

$$\frac{f}{2}n_1RT_1 + \frac{f}{2}n_2RT_2 = \frac{f}{2}(n_1 + n_2)RT,$$

melyből átrendezés után

$$T = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2}.$$

A nyomás meghatározásához a belső energia másik felírását használhatjuk:

$$\frac{f}{2}p_1V_1 + \frac{f}{2}p_2V_2 = \frac{f}{2}p(V_1 + V_2),$$

melyből átrendezés után

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

b) A Gay-Lussac kísérlet során az egyik oldalon vákuum van  $n_2 = 0$ . Így a végállapotbeli hőmérséklet  $T = T_1$ . A hőmérséklet a folyamat végén az új egyensúlyi állapotban megegyezik a kezdeti állapot hőmérsékletével. Közben a térfogata megnőtt, a nyomása pedig lecsökkent a gáznak. A hőmérséklet a folyamat során végig konstans? Erre a kérdésre nem tudunk változni, a Gay-Lussac kísérlet nem egy kvázisztatikus folyamat. A folyamat közben a gáz nincs egyensúlyi állapotban (áramlások, nem homogén), így azt nem jellemezhetjük egyszerűen a nyomás és hőmérséklet megadásával. Az ilyen folyamatokkal a nem-egyensúlyi termodinamika foglalkozik, mely egy bonyolult ága a fizikának. Az általunk tárgyalt termodinamika, lehet helyesebben termosztatikának kéne hívni, csak egyensúlyban lévő rendszerekkel foglalkozik.

**4. feladat**

Becsüljük meg a tanterem levegőjében található oxigénmolekulák átlagos sebességét!

**Megoldás:** Az ekvipartíció-tétel alapján, minden szabadsági fokra egy molekula esetén átlagosan  $\frac{1}{2}kT$  energia jut. A haladási mozgáshoz 3 szabadsági fok jut, mert a 3D-s térben három lineárisan független irányt választhatunk. Így a haladási mozgásra molekulánként átlagosan  $\frac{3}{2}kT$  energia jut:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

A képletben  $m$  egyetlen molekula tömegét,  $\langle \dots \rangle$  a várható értéket jelenti. Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg az Avogadro-állandóval:

$$\frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}RT,$$

ahol  $M$  a moláris tömeg, azaz 1 mol anyag tömege. Ebből kifejezhetünk egy átlagos sebesség értéket, mely egy becsléshez tökéletesen alkalmas:

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 297 \text{ K}}{0,032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}} = 480 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az oxigénmolekulák átlagos moláris tömege  $32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ , de ne felejtjük el, hogy a moláris tömeg SI alapegysége  $\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ . A számolás alapján az oxigénmolekulák átlagos sebessége  $1700 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  nagyságrendű.

### 5. feladat

Határozzuk meg a hőtágulási együttható értékét van der Waals-gáz esetében! A van der Waals-gáz állapotegyenlete:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

**Megoldás:** Már most érdemes megemlíteni, hogy a termodinamika nem csak az ideális gáz fizikájának tantárgya, hanem egy olyan általános keretrendszer, melyet széleskörűen lehet használni különböző állapotegyenlettel megadott rendszerek leírására. Későbbi tanulmányaitok során feketelyukakra, szupravezetőkire, stb. alkalmazzátok majd a most megtanult termodinamikai keretrendszert. Az első állapotegyenlet, melyet az ideális gázon kívül sokat vizsgálunk a mostani tantárgy alkalmával a van der Waals vagy reális gázok állapotegyenlete. A van der Waals gáz az ideális gázok általánosításával kapható meg. A  $b$  paraméterrel figyelembe vesszük a gáz részecskék saját térfogatát. Az  $a$  paraméterrel a részecskék közötti kölcsönhatást írjuk le. Vonzó kölcsönhatás mellett  $a$  egy pozitív paraméter.

A hőtágulási együttható a

$$\beta = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p$$

képlettel határozható meg, melyhez a  $V(p, T)$  függvény meghatározása szükséges. Ez egy kis nehézség, mert az állapotegyenlet  $V$ -ben harmadrendű egyenletre vezet. Ügyes trükkként a parciális deriváltakra vonatkozó azonosságot használhatjuk

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{1}{\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_p}.$$

Ehhez a  $T(V, p) = \frac{1}{R} \left(p + \frac{an^2}{V^2}\right) \left(\frac{V}{n} - b\right)$  függvény szükséges.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_p = -2 \frac{1}{R} \frac{an^2}{V^3} \left(\frac{V}{n} - b\right) + \frac{1}{nR} \left(p + \frac{an^2}{V^2}\right).$$

A derivált ismeretében már könnyen felírható a hőtágulási együttható.

### 6. feladat

Mekkora a nyomáskorrekció, térfogatkorrekció és belsőenergia-korrekció a tanterem levegőjére, ha az ideális gáz modell helyett reális gáz modellel közelítem azt. A van der Waals-gáz belső energiája:

$$U = \frac{f}{2} nRT - \frac{an^2}{V}.$$

A levegő van der Waals állandói:  $a = 140 \frac{\text{kPa} \cdot \text{dm}^6}{\text{mol}^2}$ ,  $b = 40 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}}$ .

**Megoldás:** Tekintsünk az 1. feladatban tárgyalt levegő mennyiséget. A térfogati korrekció értéke

$$V_{\text{kor}} = nb = 24 \text{ kmol} \cdot 40 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}} \sim 1 \text{ m}^3.$$

A tanteremben lévő levegő saját térfogata közelítőleg  $1 \text{ m}^3$ , mely a tanterem  $600 \text{ m}^3$ -es térfogatának  $0,2\%$ -a.

A nyomás korrekció értéke:

$$p_{\text{kor}} = \frac{an^2}{V^2} = \frac{140 \frac{\text{kPa} \cdot \text{dm}^6}{\text{mol}^2} (24 \text{ kmol})^2}{(600 \text{ m}^3)^2} \sim 0,2 \text{ kPa}.$$

A normál légköri nyomáshoz képest (100 kPa) ez 0,2%-os hibát jelent.

Végezetül az energia korrekciót számoljuk ki:

$$U_{\text{kor}} = \frac{an^2}{V} = \frac{140 \frac{\text{kPa} \cdot \text{dm}^6}{\text{mol}^2} (24 \text{ kmol})^2}{600 \text{ m}^3} \sim 130 \text{ kJ}.$$

Mely a kiszámolt 148 MJ értékhez képest egy 0,1%-os hibát jelent.

A feladatból jól látható, hogy normál állapotú gázok esetén a van der Waals állapotegyenlet használata felesleges, 0,1% hibák jelennek meg. Akkor válik szükségessé a reális gázok állapotegyenlete, amikor nagy sűrűségű és/vagy alacsony hőmérsékletű gázokat tekintünk.

### 7. feladat

Rajzoljuk fel a  $p - V$  síkon az izotermákat ideális gáz és van der Waals gáz esetében!

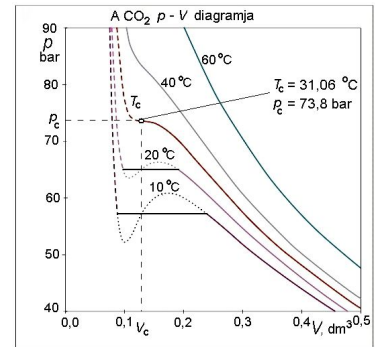
#### Megoldás:

Ideális gáz esetén  $p = \frac{nRT}{V}$ , így ha adott  $T$  esetén  $p - V$  síkon kirajzoljuk a  $p(V)$  függvényt, akkor annak alakja a jól ismert hiperbola. Ideális gáz esetén  $p - V$  síkon az izotermák hiperbola alakúak. Ez csak az ideális gázra jellemző tulajdonság, más állapotegyenletek esetén egészen más alakú izoterma görbéket is kaphatunk.

Reális gáz esetén a

$$p(V) = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

függvényt kell ábrázolni különböző hőmérsékletek mellett. A wikipedia-ról leszedett ábrán szén-dioxid paramétereit mellett ábrázolták az izotermák görbéit. Jól látható, hogy nagy hőmérsékleten kb. hiperbola alakúak, de ahogy csökkentjük a hőmérsékletet megjelenik egy extra lokális maximum a görbéken. Az ábrákon alacsony hőmérsékleten lévő vízszintes átkötéseket hagyjuk figyelmen kívül, erről majd később lesz szó.



### 8. feladat

Becsüljük meg a van der Waals gáz „fázisátalakulásához” tartozó kritikus nyomás  $p_c$ , térfogat  $V_c$  és hőmérséklet  $T_c$  értékeket levegőre! Írjuk fel ezek segítségével a van der Waals gáz állapotegyenletét!

#### Megoldás:

Az előző feladatban láthattuk, hogy a reális gázok esetén a hőmérséklet csökkenése mellett az izotermákon egyszer csak megjelenik egy-egy lokális maximum és minimum. Azt a hőmérsékletet, nyomást és térfogatot ahol először megjelenik ez a viselkedés kritikus hőmérsékletnek, nyomásnak és térfogatnak nevezzük. Rájuk pedig a  $T_c$ ,  $p_c$  és  $V_c$  jelöléseket fogjuk alkalmazni. Meghatározásukhoz a következő egyenletrendszerrel kell megoldanunk

$$(1) \quad \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_{\text{kritikus pontban}} = 0$$

$$(2) \quad \left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_{\text{kritikus pontban}} = 0.$$

Elvégezve a deriválásokat:

$$(3) \quad -\frac{nRT_c}{(V_c - nb)^2} + 2\frac{an^2}{V_c^3} = 0$$

$$(4) \quad 2\frac{nRT_c}{(V_c - nb)^3} - 6\frac{an^2}{V_c^4} = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása  $V_c = 3nb$ , ahonnan  $T_c = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb}$  és  $p_c = \frac{a}{27b^2}$ . Ezekkel a változókkal átírhatjuk az állapotegyenletet is:

$$\left[ \frac{p}{p_c} + 3\frac{1}{\left(\frac{V}{V_c}\right)^2} \right] \left[ 3\frac{V}{V_c} - 1 \right] = 8\frac{T}{T_c}.$$

Ha a kifejezést átskálázzuk, azaz például  $T$  helyett a  $T/T_c$  dimenziótlan változóval dolgozunk, akkor nem jelennek meg anyagi paraméterek, vagyis mindegyik van-der Waals gáz azonos módon viselkedik. Ezért hívjuk a reális gázokat univerzálisnak.

Levegőre kiszámolhatjuk ezeket a kritikus értékeket:

$$V_c = 3nb = 3 \cdot 24 \text{ kmol} \cdot 40 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}} \sim 3 \text{ m}^3.$$

$$T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} = \frac{8}{27} \frac{140 \frac{\text{kPa dm}^6}{\text{mol}^2}}{8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 40 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}}} = 125 \text{ K}$$

$$p_c = \frac{a}{27b^2} = \frac{140 \frac{\text{kPa dm}^6}{\text{mol}^2}}{27 \cdot \left(40 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}}\right)^2} = 3,2 \text{ MPa}.$$

Látható, hogy a kritikus pontban a gáz térfogata a molekulák saját térfogatának éppen háromszorosa. A hőmérséklet pedig viszonylag alacsony. Ebből a feladatból is jól látható, hogy akkor kell a reális gázok állapotegyenletét használni, ha nagy sűrűségű és/vagy alacsony hőmérsékletű gázokat tekintünk.