# Hőtan és folytonos közegek mechanikája 7. gyakorlat

*Szükséges előismeretek:* Parciális derivált, Taylor-sorfejtés, állapotegyenlet, hőtágulási együttható, izoterm kompresszibilitás, ideális gáz állapotegyenlete

**Órai feladatok:**

**1. feladat**

Adott az alábbi két változós függvény $f(x,y) = ax + by + \frac{x}{y^2} + cxy$.

a) Számoljuk ki a $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y$ és a $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x$ parciális deriváltakat!

b) Lássuk be a Young-tételt, azaz $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$!

**Megoldás:** a) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y$ parciális derivált kiszámolásához fel kell írnunk az $f(x,y)$ függvényt, majd az $x$ változó szerint deriválni kell, miközben az $y$ változót fixen tartjuk.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax + by + \frac{x}{y^2} + cxy\right) = a + \frac{1}{y^2} + cy.$$

Hasonlóan a másik derivált:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(ax + by + \frac{x}{y^2} + cxy\right) = b - 2\frac{x}{y^3} + cx.$$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ kifejezésből az első deriváltat már az a) feladatrész elején kiszámoltuk. Ezek után már csak a második derivált elvégzése van hátra:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(a + \frac{1}{y^2} + cy\right) = -\frac{2}{y^3} + c.$$

Hasonlóan a másik esetben:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(b - 2\frac{x}{y^3} + cx\right) = -\frac{2}{y^3} + c.$$

A két kifejezés megegyezik. A Young-tétel általánosan is igaz, azaz a parciális deriváltak sorrendje felcserélhető.

**2. feladat**

Fejtsd Taylor-sorba az alábbi függvényeket!

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 1 \ \text{ függvényt } x_0 = 1 \text{ körül másodrendig.} \\ g(x,y) &= x^2 + 3y^2 - 2xy \ \text{ függvényt } x_0 = 1 \text{ és } y_0 = 2 \text{ körül elsőrendig.} \end{aligned}$$

**Megoldás:** Egyváltozós függvények Taylor-sorfejtése másodrendig az $x = x_0$ pont körül:

$$f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2.$$

Beírva a feladatban kapott függvényt:

$$f(x) \approx f(1) + 6x|_{x=1}(x-1) + \frac{1}{2}6|_{x=1}(x-1)^2 = 4 + 6(x-1) + 3(x-1)^2.$$

Kétváltozós függvények Taylor-sorfejtése elsőrendig az $x = x_0$ és $y = y_0$ pont körül:

$$g(x,y) \approx g(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0,y=y_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x_0,y=y_0}(y-y_0).$$

Beírva a feladatban kapott függvényt:

$$g(x,y) \approx g(1,2) + (2x-2y)|_{x=1,y=2}(x-1) + (6y-2x)|_{x=1,y=2}(y-2) = 9 - 2(x-1) + 10(y-2).$$

**3.feladat**

Lássuk be a parciális deriváltakra vonatkozó alábbi azonosságokat! Használjuk a teljes differenciál felírását $dz = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x dy$!

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y &= \left.\frac{\partial z}{\partial q}\right|_y \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_y \\
\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y &= \left(\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y\right)^{-1} \\
\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z &= -\frac{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y} \\
-1 &= \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_x
\end{aligned}$$

**Megoldás:** Az első összefüggés az összetettfüggvény deriválásán alapul:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z(q(x,y),y)}{\partial x} = \frac{\partial z(q,y)}{\partial q}\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$$

A második összefüggéshez a teljes derivált felírásából fejezzük ki a $dx/dz$ hányadost állandó $y$ mellett. Ha $y$ állandó, akkor $dy = 0$, hiszen nem változik meg az értéke.

$$\left.\frac{dx}{dz}\right|_{y=\text{állandó}} = \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y\right)^{-1}.$$

Innen már reciprokvétel után adódik a második egyenlőség.

A harmadik összefüggéshez a teljes derivált felírásából fejezzük ki a $dx/dy$ hányadost állandó $z$ mellett. Ha $z$ állandó, akkor $dz = 0$, hiszen nem változik meg az értéke.

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{z=\text{állandó}} = -\frac{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y}.$$

Ez pontosan a harmadik kifejezés.

A negyedik kifejezést a 'hármas szabályt' az előző összefüggés átrendezésével és a második összefüggés egyszeri alkalmazásával bárki levezetheti.

**4.feladat**
Az ideális gáz állapotegyenlete: $pV = nRT$. Lássuk be ideális gáz esetén az alábbi összefüggést:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V = -1!$$

Teljesül-e az összefüggés tetszőleges állapotegyenlet esetén?

**Megoldás:** Számoljuk ki külön-külön az egyes szorzótényezőket:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T = \frac{\partial}{\partial V} p(V,T) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{nRT}{V}\right) = -\frac{nRT}{V^2}.$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p = \frac{\partial}{\partial T} V(p,T) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{nRT}{p}\right) = \frac{nR}{p}.$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_V = \frac{\partial}{\partial p} T(p,V) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pV}{nR}\right) = \frac{V}{nR}.$$

A három tag szorzata:

$$-\frac{nRT}{V^2}\frac{nR}{p}\frac{V}{nR} = -\frac{nRT}{pV} = -1.$$

Ideális gáz esetén teljesül az egyenlet. Általános esetben is teljesül, hiszen éppen a parciális deriváltakra vonatkozó 'hármas-szabály' lett felírva.

**5. feladat** Definiáljuk a hőtágulási együtthatót és izoterm kompresszibilitást a következő módon:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p \\ \kappa_T &= -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T.\end{aligned}$$

Határozzuk meg a hőtágulási együttható és az izoterm kompresszibilitás értékét ideális gáz esetében!

**Megoldás:** A hőtágulási együttható kiszámításához fel kell írnunk ideális gázra a $V(T,p)$ függvényt. Az ideális gáz állapotegyenlete $pV = nRT$ alapján: $V(T,p) = \frac{nRT}{p}$. A térfogati hőtágulási együttható:

$$\beta = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p = \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{nRT}{p}\right) = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}.$$

Az izoterm kompresszibilitás meghatározásához szintén a $V(T,p)$ függvény szükséges:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{nRT}{p}\right) = \frac{nRT}{p^2V} = \frac{1}{p}.$$

**6. feladat**
Becsüljük meg egy szobában található levegő tömegét!

**Megoldás:**
A szoba méretei, ahol éppen a megoldást írom, 3 m a belmagasság és körülbelül 10 m$^2$ az alapterület. A szoba, és így a szobában található levegő térfogata is 30 m$^3$. A szobában normál légköri nyomás 100

kPa és kb.: 22 °C= 295 K hőmérséklet van. A levegő anyagmennyisége az ideális gáz állapotegyenletéből számolható ki:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{100\text{ kPa}\cdot 30\text{ m}^3}{8{,}314\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\,295\text{ K}} = 1200\text{ mol}.$$

A levegő nitrogénből és oxigénből áll, átlagos moláris tömege kb. 29 g/mol. Így a levegő tömege 29 g/mol · 1200 mol = 35 kg. A szobában kb. 35 kg tömegű levegő van.

**1. feladat** Egy transzverzális síkhullámban a kitérésfüggvény a hely és idő függvényeként az alábbi alakú:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = 3{,}3\text{ cm}\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}\sin\left(314\frac{1}{\text{s}}\cdot t - 5{,}617\frac{1}{\text{m}}\cdot(2x-y)+1\right).$$

a) Mekkora a frekvencia?
b) Mekkora a hullámszám?
c) Mekkora a hullám fázissebessége?
d) Mekkora az $a$ szám értéke?

**Megoldás**
A síkhullám megoldás általános alakja:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}_0\sin(\omega t - \mathbf{kr} + \phi).$$

Ezek alapján azonosíthatjuk az egyes tagokat.

a) A körfrekvencia értéke $\omega = 314\frac{1}{\text{s}}$, amelyből a frekvencia értéke $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz. Amennyiben a periódusidőre is kíváncsiak lennénk: $T = \frac{1}{f} = 0{,}02\ s$.

b) A **kr** skaláris szorzat értéke $5{,}617\frac{1}{\text{m}}\cdot(2x-y)$, mely a $\mathbf{k} = 5{,}617\frac{1}{\text{m}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ és az $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix}$ vektorok skaláris szorzatából adódik. A hullámszámvektor hossza $k = |\mathbf{k}| = 5{,}617\frac{1}{\text{m}}\sqrt{2^2+(-1)^2} = 12{,}56\frac{1}{\text{m}}$. A hullámhossz $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}5$ m.

c) A hullám fázissebessége $c_{\text{fazis}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}5\text{ m}}{0{,}02\ s} = 25\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

d) A hullám transzverzális, tehát a kitérés **u** és a haladási irány **k** egymásra merőleges, azaz az **uk** skaláris szorzat és $\mathbf{u_0k}$ skaláris szorzat értéke is nulla. Egyszerűsítve a konstansokkal, az adódik, hogy a $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$ vektorok skaláris szorzatának nullának kell lennie. A skaláris szorzat értéke $2-a$, amely kifejezés akkor nulla, ha $a = 2$.

**2. feladat** A pontszerű hullámforrásból 1,2 kHz frekvenciájú gömbhullámok indulnak ki. A hullámok terjedési sebessége 30 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mekkora a fáziskülönbség a hullám két olyan pontja között, amelyek 25 cm, illetve 55 cm távolságra vannak a hullámforrástól?

**Megoldás** A hullámhossz: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{30\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}2kHz} = 2{,}5\ cm$. A hullámmaximumok adott pillanatban olyan koncentrikus gömbökön helyezkednek el, amelyek sugara $r = r_0 + n\lambda$ képlettel adható meg. $n$ egész számokat jelöl. Ha a hullámforrástól 25 cm-re maximum található, akkor $25\text{cm} + n\cdot 2{,}5$ cm helyeken is maximum van. $n = 12$-re ennek az értéke éppen 55 cm. Tehát a két helyen azonos időpillanatban van maximum, azaz a fázisban vannak. Köztük a fáziskülönbség $12 \cdot 2\pi = 24\pi$, ha csak $2\pi$ erejáig érdekel a fáziskülönbség, akkor az értéke éppen nulla.

**3. feladat** Vízhullámoknál a fázissebesség függ a hullám hullámhosszától, az alábbi függvény szerint $c_f = A\sqrt{\lambda}$, ahol $A$ egy konstans. Határozzuk meg a csoportsebesség és a fázissebesség arányát!
**Megoldás** A fázissebesség értéke

$$c_f = \frac{\omega}{k} = A\sqrt{\frac{2\pi}{k}},$$

melyből az $\omega(k)$ függvény $\omega(k) = A\sqrt{2\pi k}$ alakot kapjuk. A csoportsebesség értéke

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(A\sqrt{2\pi k}) = \frac{1}{2}A\sqrt{\frac{2\pi}{k}} = \frac{c_f}{2}$$

**4. feladat** $f = 500$ 1/s frekvenciájú hangvillát kézben tartva $v = 2$ m/s sebességgel nagyméretű fal felé közelítünk. Milyen frekvenciájú lebegést észlelünk?

**Megoldás**
Kovács Párkányi I. 310. feladata. Megoldása itt olvasható: `http://ribarik.web.elte.hu/downloads/Kovacs-Parkanyi-1.pdf`

**5. feladat** Kovács Párkányi I. 313. feladata. Feladat és megoldás itt olvasható: `http://ribarik.web.elte.hu/downloads/Kovacs-Parkanyi-1.pdf`

**6. feladat** Határozzuk meg azokat a frekvenciákat,amelyekre azegyik végén lezárt a másikon nyílt, levegővel teli $l = 1{,}65$ cm hosszúságú cső rezonál!

**Megoldás** Olyan állóhullámot kell keresni, ahol a cső zárt végén csomópont, a nyílt végén duzzadó hely van. Ahogy a `http://metal.elte.hu/~phexp/doc/rhh/f4s1s3s1.htm` 27.ábráján is látható, ilyenkor a kapcsolat a síp hossza és a hullámhossz között:

$$l = (2k+1)\frac{\lambda}{4},$$

ahol $k$ egy természetes szám. Az észlelhető frekvenciák:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l}(2k+1) = 51{,}5\,\mathrm{Hz}(2k+1),$$

ahol felhasználtuk, hogy hang terjedési sebessége $c = 330$ m/s.
**Gyakorló feladatok:**
Kovács-Párkányi I.: 292 - 299, 303 - 318