Hőtan és folytonos közegek mechanikája 6. gyakorlat

Szükséges előismeretek: Hullámok, Doppler-effektus, lebegés, csoport és fázissebesség

Órai feladatok:

1. feladat Egy transzverzális síkhullámban a kitérésfüggvény a hely és idő függvényeként az alábbi alakú:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = 3{,}3\ \mathrm{cm}\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}\sin\left(314\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t - 5{,}617\frac{1}{\mathrm{m}}\cdot(2x-y)+1\right).$$

a) Mekkora a frekvencia?
b) Mekkora a hullámszám?
c) Mekkora a hullám fázissebessége?
d) Mekkora az a szám értéke?

Megoldás
A síkhullám megoldás általános alakja:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}_0\sin(\omega t - \mathbf{kr}+\phi).$$

Ezek alapján azonosíthatjuk az egyes tagokat.

a) A körfrekvencia értéke $\omega = 314\frac{1}{\mathrm{s}}$, amelyből a frekvencia értéke $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz. Amennyiben a periódusidőre is kíváncsiak lennénk: $T = \frac{1}{f} = 0{,}02\ s$.

b) A $\mathbf{kr}$ skaláris szorzat értéke $5{,}617\frac{1}{\mathrm{m}}\cdot(2x-y)$, mely a $\mathbf{k} = 5{,}617\frac{1}{\mathrm{m}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ és az $\mathbf{r} = \begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix}$ vektorok skaláris szorzatából adódik. A hullámszámvektor hossza $k = |\mathbf{k}| = 5{,}617\frac{1}{\mathrm{m}}\sqrt{2^2+(-1)^2} = 12{,}56\frac{1}{\mathrm{m}}$. A hullámhossz $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}5$ m.

c) A hullám fázissebessége $c_{\text{fazis}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}5\ \mathrm{m}}{0{,}02\ s} = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

d) A hullám transzverzális, tehát a kitérés $\mathbf{u}$ és a haladási irány $\mathbf{k}$ egymásra merőleges, azaz az $\mathbf{uk}$ skaláris szorzat és $\mathbf{u_0k}$ skaláris szorzat értéke is nulla. Egyszerűsítve a konstansokkal, az adódik, hogy a $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$ vektorok skaláris szorzatának nullának kell lennie. A skaláris szorzat értéke $2-a$, amely kifejezés akkor nulla, ha $a = 2$.

2. feladat A pontszerű hullámforrásból 1,2 kHz frekvenciájú gömbhullámok indulnak ki. A hullámok terjedési sebessége 30 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Mekkora a fáziskülönbség a hullám két olyan pontja között, amelyek 25 cm, illetve 55 cm távolságra vannak a hullámforrástól?

Megoldás A hullámhossz: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}2kHz} = 2{,}5\ cm$. A hullámmaximumok adott pillanatban olyan koncentrikus gömbökön helyezkednek el, amelyek sugara $r = r_0 + n\lambda$ képlettel adható meg. n egész számokat jelöl. Ha a hullámforrástól 25 cm-re maximum található, akkor $25\mathrm{cm} + n\cdot 2{,}5$ cm helyeken is maximum van. $n = 12$-re ennek az értéke éppen 55 cm. Tehát a két helyen azonos időpillanatban van maximum, azaz a fázisban vannak. Köztük a fáziskülönbség $12\cdot 2\pi = 24\pi$, ha csak 2π erejéig érdekel a fáziskülönbség, akkor az értéke éppen nulla.

3. feladat Vízhullámoknál a fázissebesség függ a hullám hullámhosszától, az alábbi függvény szerint $c_f = A\sqrt{\lambda}$, ahol A egy konstans. Határozzuk meg a csoportsebesség és a fázissebesség arányát!
Megoldás A fázissebesség értéke

$$c_f = \frac{\omega}{k} = A\sqrt{\frac{2\pi}{k}},$$

melyből az $\omega(k)$ függvény $\omega(k) = A\sqrt{2\pi k}$ alakot kapjuk. A csoportsebesség értéke

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(A\sqrt{2\pi k}) = \frac{1}{2}A\sqrt{\frac{2\pi}{k}} = \frac{c_f}{2}$$

4. feladat $f = 500$ 1/s frekvenciájú hangvillát kézben tartva $v = 2$ m/s sebességgel nagyméretű fal felé közelítünk. Milyen frekvenciájú lebegést észlelünk?

Megoldás
Kovács Párkányi I. 310. feladata. Megoldása itt olvasható: `http://ribarik.web.elte.hu/downloads/Kovacs-Parkanyi-1.pdf`

5. feladat Kovács Párkányi I. 313. feladata. Feladat és megoldás itt olvasható: `http://ribarik.web.elte.hu/downloads/Kovacs-Parkanyi-1.pdf`

6. feladat Határozzuk meg azokat a frekvenciákat,amelyekre azegyik végén lezárt a másikon nyílt, levegővel teli $l = 1{,}65$ m hosszúságú cső rezonál!

Megoldás Olyan állóhullámot kell keresni, ahol a cső zárt végén csomópont, a nyílt végén duzzadó hely van. Ahogy a `http://metal.elte.hu/~phexp/doc/rhh/f4s1s3s1.htm` 27.ábráján is látható, ilyenkor a kapcsolat a síp hossza és a hullámhossz között:

$$l = (2k+1)\frac{\lambda}{4},$$

ahol k egy természetes szám. Az észlelhető frekvenciák:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l}(2k+1) = 51{,}5\,\mathrm{Hz}(2k+1),$$

ahol felhasználtuk, hogy hang terjedési sebessége $c = 330$ m/s.

Gyakorló feladatok:

Kovács-Párkányi I.: 292 - 299, 303 - 318