Hőtan és folytonos közegek mechanikája 5. gyakorlat

Szükséges előismeretek: Bernoulli-törvény, Toricelli-féle kiömlési törvény, kontinuitási egyenlet, Boyle-Mariotte törvény

Órai feladatok:

1. feladat Kis belső keresztmetszetű, mindkét végén nyitott üvegcsövet függőleges helyzetben félig vízbe merítünk. A cső felső végét befogva kiemeljük a vízből. Milyen hosszú vízoszlop marad a csőben?

Megoldás

Legyen az üvegcső hossza l. Kezdetben $l/2$ hosszú vízoszlop és $l/2$ hosszú levegőoszlop található az üvegcsőben. Az üvegcső kiemelése után a csőben x hosszúságú vízoszlop és $l-x$ hosszúságú levegőoszlop található. A kiemelés során a víz egy része kifolyik a csőből. A levegő hőmérséklete és anyagmennyisége a kiemelés során nem változik meg, így felírhatjuk rá a Boyle-Mariotte törvényt

$$p_0\frac{l}{2} = p\cdot(l-x),$$

ahol p_0 a normál légköri nyomás, p a bezárt levegő nyomása a kiemelés után. A cső keresztmetszetével mindkét oldalon egyszerűsíthettünk. A másik egyenletünk az egyensúlyból adódik, a kiemelés után a csőben lévő vízoszlopn aljának egyensúlyban kell lennie. A bezárt levegő nyomásának plusz a víz hidrosztatikai nyomásának meg kell egyeznie a külső légköri nyomással:

$$p_0 = p + \rho g x,$$

ahol ρ a víz sűrűsége, g a nehézségi gyorsulás. A második egyenletből p-t behelyettesítve az első egyenletbe a következőt kapjuk:

$$p_0\frac{l}{2} = (p_0-\rho g x)\cdot(l-x).$$

Vezessük be az $L=\frac{p_0}{\rho g}=\frac{100\ \mathrm{kPa}}{1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}}=10\,\mathrm{m}$ mennyiséget. Ez éppen annak a vízoszlopnak a magassága, mely egyensúlyt tart a külső légköri nyomással. Ennek bevezetésével

$$L\frac{l}{2} = (L-x)\cdot(l-x).$$

Az egyenlet x-ben másodfokú egyenletre vezet

$$x^2-(L+l)x+\frac{lL}{2},$$

melynek megoldása

$$x=\frac{L+l-\sqrt{L^2+l^2}}{2}.$$

Például, ha $l=1$ m-es üvegcsővel végeztük volna el a kísérletet, akkor $x=0{,}48$ m-nyi vízoszlop maradt volna az üvegcsőben. Azaz, mindösszesen 2 cm víz folyt volna ki.

2. feladat Hogyan változik a buborék mérete, miközben felemelkedik

a) egy tó mélyéről?

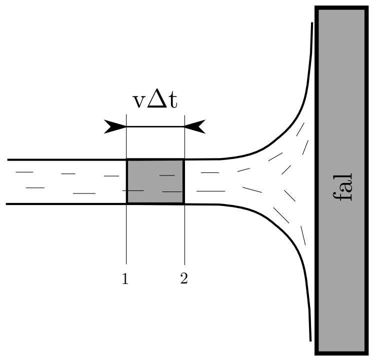
b) egy függőlegesen álló Mikola-csőben?

Megoldás

a) Ha a tó mélyéről felemelkedik egy buborék, akkor a benne lévő levegőre felírhatjuk a Boyle-Marriotte törvényt. Ennek felírása során feltételezzük, hogy a hőmérséklet nem változik meg, és a levegő anyagmennyisége sem változik meg, pl.: nem olvadnak össze buborékok. A tó mélyén lévő buborékban a levegő nyomás $p_0 + \rho g h$, ahol p_0 a normál légköri nyomás, ρ a víz sűrűsége, h azt mondja meg, milyen mélyen van a buborék. A múlt órán megmutattuk, hogy a görbület miatti nyomás különbség elhanyagolható a normál légköri nyomáshoz képest. Miközben emelkedik a buborék a h mélység csökken, azaz a levegő nyomása is csökken, így a Boyle-Marriotte törvény értelmében a levegő buborék térfogata növekszik. Emelkedés közben a buborék térfogata növekszik.

b) Mikola-cső egy mindkét végén zárt cső, amiben víz és egy légbuborék található. A teljes cső térfogata nem változik meg, mert az üveg cső nem deformálódik. A víz összenyomhatatlan közeg ezért nem változik a térfogata. Így a légbuborék térfogatának is állandónak kell lennie. Mikola-csőben emelkedő buborék térfogata nem változik meg.

3. feladat v_0 sebességű, A keresztmetszetű vízsugár érkezik merőlegesen egy függőleges felületre, majd szétterül és elfolyik. Mekkora erővel hat a vízsugár a függőleges felületre?



Megoldás

Az erő meghatározásához felhasználjuk, hogy az erő nem más, mint az impulzus idő szerinti deriváltja. Ha ki tudnánk számolni, hogy egységnyi Δt idő alatt mennyit változik a rendszer impulzusának vízszintes komponense Δp_v , akkor a függőleges felületre kifejtett vízszintes F erő nem más lenne, mint $F = \frac{\Delta p_v}{\Delta t}$.

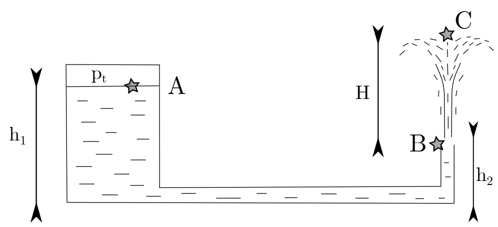
Jelöljük be képzeletben a vízsugár egy adott keresztmetszetét (ábrán 1 szám jelöli). Vizsgáljuk meg mennyivel változik meg az ettől a keresztmetszettől jobbra található vízmennyiség vízszintes impulzusa Δt idő alatt. A bejelölt keresztmetszet Δt idő alatt a 2 pozícióba kerül át. Az áramlási kép nem változik meg. A fönt és lent elfolyt vízzel nem kell számolnunk, mert annak úgyis csak függőleges impulzus komponense van. Így a vízszintes impulzus megváltozása éppen a besötétített rész impulzusával egyezik meg. A besötétített rész térfogata $Av\Delta t$, így a tömege $\rho A v \Delta t$, impulzusa pedig $\rho A v^2 \Delta t$. A kifejtett erő

$$F = \frac{\Delta p_v}{\Delta t} = \frac{\rho A v^2 \Delta t}{\Delta t} = \rho A v^2.$$

A számolás során feltételeztük, hogy a víz nem fröccsen vissza a felületről, hanem a felület mentén elfolyik.

4. feladat Egy zárt $p_t = 400\,\mathrm{kPa}$ nyomású tartályban a vízszint h_1=5 m magasságú. A tartály aljához egy vízszintes vezeték csatlakozik, mely az utolsó h_2 =2 méteren függőlegesbe fordul, és a vége nyitott. Mekkora lesz a „szökőkút" H magassága stacionárius kifolyási állapotban? Mekkora a stacionárius kiáramlási sebesség?

Megoldás



Az ábrán látható A és B pontok között felírhatjuk a Bernoulli-törvényt. Az A pontban a víz sebessége körülbelül nulla, hiszen tartály keresztmetszete jóval nagyobb a vezeték keresztmetszeténél. A B pontban a víz sebessége v, nyomása a normál légköri nyomás p_0.

$$p_t + \frac{1}{2}\rho \left(0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \rho g h_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h_2$$

Átrendezve a kiáramlási sebességre a következő adódik:

$$v = \sqrt{2\frac{p_t - p_0 + \rho g(h_1 - h_2)}{\rho}} = \sqrt{2\frac{400\ \mathrm{kPa} - 100\ \mathrm{kPa} + 1000 \cdot 10 \cdot (5-2)\ \mathrm{Pa}}{1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = 25{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Következő lépésként az A és C pontok között írjuk fel a Bernoulli-törvényt. A szökőkút tetején a víz áramlási sebessége kb. nulla.

$$p_t + +\rho g h_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(h_2 + H)$$

Innen a szökőkút H magassága:

$$H = \frac{p_t - p_0}{\rho \cdot g} - h_2 + h_1 = (30 + 5 - 2)\ \mathrm{m} = 33\ \mathrm{m}.$$

A Bernoulli-törvényből az adódik, hogy a B pont elhagyása után a víz gyakorlatilag szabadon esik.

5. feladat Egy vízszintesen tartott vékony cső keresztmetszete adott $A(x)$ függvény szerint változik. Hogyan változik a csőben áramló folyadék nyomása és sebessége?

Megoldás A cső elején legyen a cső keresztmetszete A_0, az áramló folyadék sebessége v_0, nyomása p_0. A számolás során feltételezzük, hogy a folyadék mindenhol kitölti a csövet, azaz a keresztmetszetben nincsenek hirtelen ugrások. Továbbá előírjuk azt is, hogy az áramlási sebesség egy adott keresztmetszetnél mindenhol állandó. Ez a feltétel súrlódásmenetes áramlásoknál és kis csöveknél fenn áll. Felhasználjuk a kontinuitási egyenletet:

$$v(x)A(x) = v_0 A_0.$$

Illetve felhasználjuk a Bernoulli-egyenlet:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p(x) + \frac{1}{2}\rho v(x)^2.$$

A cső vízszintes, így a helyzeti energiát tartalmazó részre nincsen szükségünk. A két egyenletet rendezve megkapjuk a sebesség értékét a cső vízszintes x pozíciójának függvényében:

$$v(x) = v_0 \frac{A_0}{A(x)}.$$

A nyomása a cső vízszintes x pozíciójának függvényében pedig:

$$p(x) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \left(1 - \frac{A_0^2}{A(x)^2}\right).$$

6. feladat Egy A alapterületű felül nyitott hordót H magasságig megtöltöttünk vízzel. A hordó alján egy a keresztmetszetű lyukat ütöttünk.

a) Mekkora sebességgel folyik ki a víz a lyukon?

b) Mennyi idő alatt folyik ki az összes víz a hordóból?

Megoldás

a) A víz sebességét az ún. Toricelli-féle kiömlési törvény adja meg. Ezt legegyszerűbben a Bernoulli-törvény segítségével számolhatjuk ki. Nézzünk egy áramvonalat, mely a hordóban lévő vízfelszíntől indul és áthalad a lyukon. A nyomás mindkét helyen p_0, azaz a normál légköri nyomás. A kiömlő víz esetén már nem kell a hidrosztatikai nyomással számolni. A vízfelszínen a víz sebessége közelítőleg nulla. Így a Bernoulli-törvény alapján:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\left(0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \rho g H = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

a kiömlő víz sebessége $v = \sqrt{2gH}$.

b) A hordóban a víz felszín idővel csökken $h(t)$ függvény szerint. A kiömlési sebesség is csökken az idővel $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$. Egységnyi Δt idő alatt $av(t)\Delta t$ térfogatnyi víz folyik ki a hordóból. A hordóban a vízszint Δt idő alatt $\Delta h = -\frac{a}{A}v(t)\Delta t$ értékkel csökken. Az egyenlet az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezet:

$$dh = -\frac{a}{A}\sqrt{2gh}dt,$$

mely átrendezve

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{a}{A}\sqrt{2g}dt.$$

Felintegrálva mindkét oldalt a kezdő és végpont között

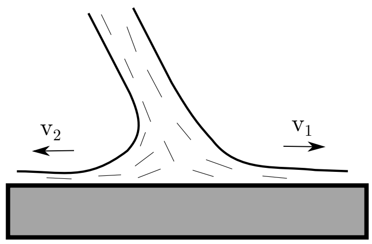
$$\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\int_0^T \frac{a}{A}\sqrt{2g}dt,$$

$$-2\sqrt{H} = -T\frac{a}{A}\sqrt{2g}.$$

A kiürüléshez szükséges T idő:

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{A}{a}.$$

7. feladat Vízszintesen álló, félkör keresztmetszetű csatornába ferdén vízsugár csapódik. Számítsuk ki a csatorna két végén kifolyó vízmennyiség arányát a vízsugár beesési szögének függvényében.



Megoldás A beérkező vízsugárnak a keresztmetszete legyen A, sebessége v, a függőlegessel α szöget zárjon be. A víz jobbra v_1 sebességgel folyik el, keresztmetszete A_1. A víz balra v_2 sebességgel folyik el, keresztmetszete A_2.

Felírhatjuk a kontinuitási törvényt (, mely gyakorlatilag az anyagmegmaradás):

$$Av = A_1 \cdot v_1 + A_2 \cdot v_2.$$

Az eresz csak függőleges erőt képes kifejteni, így az impulzus vízszintes komponensének meg kell maradnia. A vízsugár impulzusát a 3. feladatban kiszámoltuk.

$$\rho A v^2 \sin\alpha = \rho A_1 v_1^2 - \rho A_2 v_2^2$$

.

A Bernoulli törvényt felírva egy áramvonalra azt látjuk, hogy a nyomás mindenhol légköri nyomás. A helyzeti energia változás pedig elhanyagolható. Így a mozgási energia tagnak konstansnak kell lennie, azaz a sebességnek mindenhol meg kell egyeznie $v_1 = v_2 = v$. Felírva a korábbi két egyenletet:

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A\sin\alpha = A_1 - A_2.$$

Ennek megoldása:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha},$$

mely arány éppen a csatorna jobb és bal oldalán kifolyó vízmennyiségek aránya.

Gyakorló feladatok:
Kovács-Párkányi I.: 248 - 260
Útban a modern fizikához: 17A-(19-32)