

Hőtan és folytonos közegek mechanikája 10. gyakorlat

Szükséges előismeretek: I. főtétel; körfolyamatok, hőerőgépek, hűtőgépek, hőszivattyúk, Carnot-gép

1. feladat

Egy körfolyamatot a $p - V$ diagramon egy körvonal reprezentál. Ezen a diagramon a körfolyamat iránya lehet az óramutató járásával megegyező vagy ellentétes. Melyik irányítás esetén reprezentál a diagram hőerőgépet? És hőszivattyút? És hűtőgépet?

Megoldás: Egy körfolyamat egy ciklusára felírva az I. főtételt: $0 = \Delta U = Q + W$. A ciklus során a kezdő és végpont megegyezik, így a belső energia változás nulla. Q az effektív hőcsere a rendszer és a környezete között. A folyamat egy részén hőfelvétel Q^{fel} történik, míg másik részén hőleadás Q^{le} , ezeket a mennyiségeket pozitívnak választjuk. $Q = Q^{\text{fel}} - Q^{\text{le}}$. Az egy ciklusra vett I. főtétel átírva

$$0 = Q^{\text{fel}} - Q^{\text{le}} + W.$$

A körfolyamat lehet az óra mutató járásával megegyező irányítású, ilyenkor a gáz végzi a munkát, azaz az egy ciklus alatt végzett munka $W < 0$, így $Q^{\text{fel}} > Q^{\text{le}}$. Ezekben a folyamatokban a gép hőenergiát vesz fel, miközben munkát végez, a maradék hőt pedig leadja. Ezek a gépek a hőerőgépek, melyek a hatásfokkal jellemezhetőek:

$$\eta = \frac{|W|}{Q^{\text{fel}}}.$$

A hatásfok felírásakor a számlálóba írjuk azt az energia mennyiséget, ami hasznos számunkra (jelen esetben a gép által végzett munka), a nevezőbe a befektetett energiát (jelen esetben a gép által felvett hőenergiát). A hatásfok mindig kisebb, vagy egyenlő mint egy.

Ellenkező körülmények során mi végzünk munkát a gázon $W > 0$, cserébe a gáz felvesz hőenergiát, máshol pedig ennél több hőenergiát ad le. Ezek a gépek a hőszivattyúk vagy hűtőgépek. Az, hogy melyikről van szó, az dönti el, hogy számunkra a felvett vagy a leadott hőenergia a hasznos. Például hűtőgép esetében azért működtetjük elektromos hálózatról a motort, hogy a gép hőt vonjon ki a szekrény belsejéből. Az, hogy közben a hűtőgép hőt ad le a konyhában nem fontos számunkra. Ilyenkor a hatásfok analógiájára bevezethetjük a jósági tényezőt, azaz számlálóba írjuk a hasznos energiamennyiséget, nevező a befektetett energiamennyiséget

$$\epsilon_{\text{hűtő}} = \frac{Q^{\text{le}}}{W}.$$

Hőszivattyú esetén azért járattuk elektromos hálózatról a gépet, hogy az hőt emeljen át a környezetből, és ezt a hőt például a szobánkban leadja. Ilyenkor számunkra a leadott hőenergia fontos, és nem érdekel mennyi hőt vont el a környezettől. A jósági tényező:

$$\epsilon_{\text{hőszivattyú}} = \frac{Q^{\text{le}}}{W}.$$

Tehát a hőszivattyút és a hűtőgépet ugyanaz a körfolyamat írja le, csak az különbözteti meg, hogy számunkra a felvett vagy leadott hő a hasznos. A jósági tényező lehet egynél nagyobb is, lásd későbbi feladatokat.

2. feladat

Egy körfolyamat 20% hatásfokú hőerőgépet reprezentál. Mekkora a jósági tényezője egy olyan hűtőgépnek, melyet egy azonos, de ellentétes irányítású körfolyamat ír le?

Megoldás: A hőerőgépet felvesz Q^{fel} hőt, melyből végez $W = -0,2 \cdot Q^{\text{fel}}$ munkát és lead $Q^{\text{le}} = 0,8 \cdot Q^{\text{fel}}$ hőt. Ha ellentétes irányú körfolyamatot nézünk, akkor a végzett munka $\tilde{W} = -W$. A "kígyós" jelölések a hűtőgépre vonatkoznak. Ahol az eredeti körfolyamatban hőfelvétel történik, ott a megfordított folyamat esetén hőleadás történik, így $\tilde{Q}^{\text{fel}} = Q^{\text{le}}$ és $\tilde{Q}^{\text{le}} = Q^{\text{fel}}$. A hűtőgép jósági tényezője:

$$\epsilon_{\text{hűtő}} = \frac{\tilde{Q}^{\text{fel}}}{\tilde{W}} = \frac{Q^{\text{le}}}{-W} = \frac{0,8 \cdot Q^{\text{fel}}}{0,2 \cdot Q^{\text{fel}}} = 4.$$

3. feladat Elméletileg hányszor nagyobb hőmennyiséget tudunk a 20 °C -os szobába juttatni, ha a rendelkezésre álló elektromos energiát Joule-hő fejlesztése helyett egy fordított irányú, ideális Carnot-körfolyamat hajtására használjuk fel, mely hőt emel át a 0 °C -os környezetből a szobába?

Megoldás: A Carnot-gép hatásfoka

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{273}{293} = 0,068,$$

ahol T_1 az alacsony, T_2 a magas hőmérsékletű hőtartály hőmérsékletét jelöli. Ezek alapján a hőerőgép felvesz Q^{fel} hőt, melyből végez $W = -\eta \cdot Q^{\text{fel}}$ munkát és lead $Q^{\text{le}} = (1 - \eta) \cdot Q^{\text{fel}}$ hőt. A megfordított folyamatban $\tilde{Q}^{\text{le}} = Q^{\text{fel}}$, illetve $\tilde{W} = -W$. A hőszivattyú jósági tényezője:

$$\epsilon_{\text{hőszivattyú}} = \frac{\tilde{Q}^{\text{le}}}{\tilde{W}} = \frac{Q^{\text{fel}}}{-W} = \frac{1}{\eta} = 14,7.$$

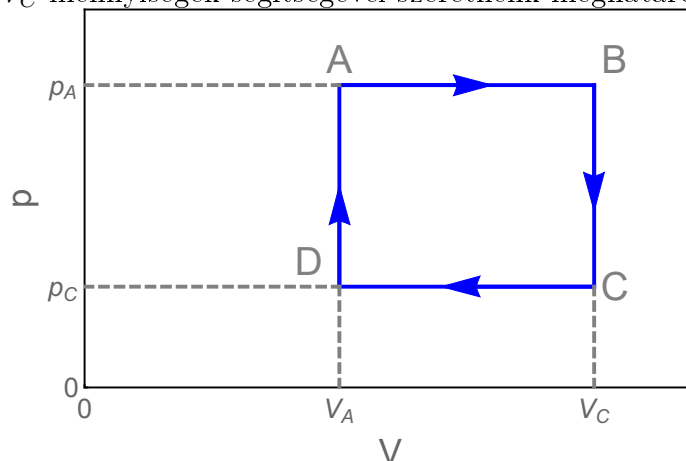
Ha az elektromos energiát hőszivattyú működésére használjuk, akkor 14,7-szer több hőenergiát lehet a szobába juttatni, mintha egyszerűen egy ellenálláson Joule-hőt fejlesztenénk. Látható, hogy az elektromos melegítés (hősugárzó) az egyik legkisebb hatásfokú melegítési mód. Hőszivattyúval sokkal gazdaságosabb melegíteni, cserébe a szerkezet sokkal összetettebb.

4. feladat

Egy hőerőgép körfolyamatát a $p - V$ diagramon egy téglalap reprezentál. Számítsd ki az egyes részfolyamatokat jellemző munkavégzést, hőközlést, és belsőenergia-változást! Határozd meg a folyamat hatásfokát!

Megoldás:

Az alábbi $p - V$ diagramon látható a feladatban leírt téglalap alakú körfolyamat. A körfolyamat hatásfokát a p_A , V_A , p_C , V_C mennyiségek segítségével szeretnénk meghatározni.



Az $A \rightarrow B$ folyamat során a végzett munka $W_{AB} = -p_A(V_C - V_A)$, mely egy negatív érték, mert a gáz végzi a munkát. A belső energia változás $\Delta U_{AB} = \frac{f}{2}nR(T_B - T_A) = \frac{f}{2}(p_AV_C - p_AV_A) = \frac{f}{2}p_A(V_C - V_A)$. A közölt hő $Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB} = \frac{f+2}{2}p_A(V_C - V_A)$. Ez egy pozitív érték, tehát ezen a szakaszon hőfelvétel történik.

A $B \rightarrow C$ folyamat során a végzett munka nulla, mert a görbe alatti terület nulla. A belső energia változás $\Delta U_{BC} = \frac{f}{2}nR(T_C - T_B) = \frac{f}{2}(p_CV_C - p_AV_C) = \frac{f}{2}V_C(p_C - p_A)$. A közölt hő $Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{f}{2}V_C(p_C - p_A)$. Ez egy negatív érték, tehát ezen a szakaszon hőleadás történik.

Az $C \rightarrow D$ folyamat során a végzett munka $W_{CD} = p_C(V_C - V_A)$, mely egy pozitív érték, mert a környezet végzi a munkát a gázon. A belső energia változás $\Delta U_{CD} = \frac{f}{2}nR(T_D - T_C) = \frac{f}{2}(p_CV_A - p_CV_C) = \frac{f}{2}p_C(V_A - V_C)$. A közölt hő $Q_{CD} = \Delta U_{CD} - W_{CD} = \frac{f+2}{2}p_C(V_A - V_C)$. Ez egy negatív érték, tehát ezen a szakaszon hőleadás történik.

Végezetül a $D \rightarrow A$ folyamat során a végzett munka nulla, mert a görbe alatti terület nulla. A belső energia változás $\Delta U_{DA} = \frac{f}{2}nR(T_A - T_D) = \frac{f}{2}(p_AV_A - p_CV_A) = \frac{f}{2}V_A(p_A - p_C)$. A közölt hő $Q_{DA} = \Delta U_{DA} = \frac{f}{2}V_A(p_A - p_C)$. Ez egy pozitív érték, tehát ezen a szakaszon hőfelvétel történik.

Az egy ciklus alatt végzett munka $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = -(p_A - p_C)(V_C - V_A)$. Ez egy negatív érték, mert a folyamat során a gáz végzi a munkát. A kiszámolt érték éppen a $p - V$ grafikonon a körfolyamat által bezárt rész területe.

A következőkben azonosítani kell, hogy mely szakaszokon történik hőfelvétel, és hol történik hőleadás. A megadott négy folyamat közül az $A \rightarrow B$ és $D \rightarrow A$ részfolyamatok során történik hőfelvétel, tehát

$$Q^{\text{fel}} = Q_{AB} + Q_{DA} = \frac{f+2}{2}p_A(V_C - V_A) + \frac{f}{2}V_A(p_A - p_C).$$

A körfolyamat hatásfoka:

$$\eta = \frac{|W|}{Q^{\text{fel}}} = \frac{(p_A - p_C)(V_C - V_A)}{\frac{f+2}{2}p_A(V_C - V_A) + \frac{f}{2}V_A(p_A - p_C)}.$$

5. feladat

Van két hőszigetelt tartályunk, az egyikben m tömegű, T_1 hőmérsékletű víz található, a másikban ugyanakkora tömegű T_2 hőmérsékletű víz van ($T_2 > T_1$). Alkalmos hőerőgépet építve legfeljebb mennyi munka vehető ki a rendszerből?

Megoldás: A két véges méretű hőtartály között egy hőerőgépet működtetünk, mely a magas hőmérsékletű hőtartályból hőt vesz fel, az alacsonyabb hőmérsékletű hőtartályba hőt ad le. Ennek következtében a melegebb hő tartály hűl, a hidegebb melegszik. A folyamat egészen addig tart amíg a két hőtartály azonos hőmérsékletű nem lesz, és már nem működtethető közöttük hőerőgép. Ha a maximális munkát szeretnénk kivenni a rendszerből, akkor a legjobb hatásfokú hőerőgépet kell használnunk, mely az ideális Carnot-gép. A Carnot-gép hatásfoka, ha a tartályok hőmérséklete τ_1 és τ_2 :

$$\eta(\tau_1, \tau_2) = 1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

Amikor a Carnot-gép kis ΔQ^{fel} hőt vesz fel, akkor a melegebb hőtartály hőmérséklete $\Delta\tau_2 = -\frac{\Delta Q^{\text{fel}}}{c \cdot m}$ értékkel lecsökken. Ekkora hőfelvétel után a Carnot-gép $\Delta Q^{\text{le}} = (1 - \eta)\Delta Q^{\text{fel}} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\Delta Q^{\text{fel}}$ hőt ad le a hidegebb hőtartályban, ennek hatására a hőtartály hőmérséklete $\Delta\tau_1 = \frac{\Delta Q^{\text{le}}}{c \cdot m}$ értékkel megnőtt. c a víz

fajhőjét jelenti. A kapott egyenletek hányadosát vesszük:

$$\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = -\frac{\frac{\Delta Q^{\text{le}}}{c \cdot m}}{\frac{\Delta Q^{\text{fel}}}{c \cdot m}} = -\frac{\Delta Q^{\text{le}}}{\Delta Q^{\text{fel}}} = -\frac{\tau_1}{\tau_2} \quad (1)$$

$$\Delta\tau_1 \cdot \tau_2 + \Delta\tau_2 \cdot \tau_1 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta(\tau_1 \cdot \tau_2) = 0 \quad (3)$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \text{állandó.} \quad (4)$$

A két hőtartály hőmérsékletének szorzata a folyamat során végig állandó. Kezdetben ennek értéke $T_1 \cdot T_2$, a folyamat végén T_m^2 , ahol T_m a végállapotbeli közös hőmérséklet. Amikor a hőtartályok hőmérséklete kiegyenlítődik, akkor a hőtartályok hőmérséklete $T_m = \sqrt{T_1 \cdot T_2}$.

A Carnot-gép működtetése során a rendszerből kivett munka:

$$W = cmT_1 + cmT_2 - 2cmT_m = cm(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 \cdot T_2}).$$

A kifejezésben a rendszer kezdeti belső energiájából a végállapotbeli belső energiát vontuk ki.

6. feladat

Egy $f = 3$ szabadságifokú gázzal egy olyan folyamatot végzünk, melyet a $p - V$ diagramon egy egyenes vonal reprezentál. A vonal végpontjai $A = (2p_1, V_1)$, $B = (p_1, 2V_1)$. Határozd meg a folyamat során hol történik hőfelvétel és hol történik hőleadás!

Megoldás: A körfolyamatok hatásfokának számolása során egy fontos lépés annak meghatározása, hogy mely szakaszokon történik hőfelvétel és hol történik hőleadás. A legtöbb esetben (például amikor a részfolyamatok politrop állapotváltozások) ez egy egyszerű feladat, de ha általános alakúak a körfolyamatok, akkor ez egy kihívást jelentő lépés. Ebben a feladatban egy egyszerűnek tűnő lineáris állapotváltozást tekintünk, ami a $p(V) = 3p_1 - \frac{p_1}{V_1}V$ egyenlettel írható le. Megmutatjuk, hogy ennek a folyamatnak a kezdetén hőfelvétel a végén pedig már hőleadás történik. Hogyan határozhatjuk meg a fordulópont helyét, ahol a hőfelvételtől átlépünk a hőleadás tartományába? A váltásnál nincs hőcsere a rendszer és a környezet között, ez az adiabata folyamatokra jellemző. Tehát a váltásnál a lineáris állapotváltozásunkat éppen érinti egy adiabata folyamat görbéje. A keresett adiabata egyenlete: $p_{\text{ad}}(V) = \frac{C}{V^\kappa}$, ahol C egy konstans. Az érintési pont koordinátái legyenek p_0, V_0 ! A két görbe ugyanazon a ponton megy át:

$$3p_1 - \frac{p_1}{V_1}V_0 = \frac{C}{V_0^\kappa}.$$

Továbbá az érintés miatt a deriváltjaik is megegyeznek

$$\partial_V p(V)|_{V=V_0} = \partial_V p_{\text{ad}}(V)|_{V=V_0} \quad (5)$$

$$-\frac{p_1}{V_1} = -\kappa \frac{1}{V_0} \frac{C}{V_0^\kappa} \quad (6)$$

$$\frac{p_1 V_0}{V_1 \kappa} = \frac{C}{V_0^\kappa} \quad (7)$$

Két egyenletünk is van a $\frac{C}{V_0^\kappa}$ kifejezésre, ezeket egyenlővé téve

$$\frac{p_1 V_0}{V_1 \kappa} = 3p_1 - \frac{p_1}{V_1} V_0,$$

ahonnan V_0 kifejezhető:

$$V_0 = \frac{3V_1 \kappa}{\kappa + 1} = 3V_1 \frac{f + 2}{2(f + 1)} = \frac{15}{8} V_1.$$

A tágulásnak első felében hőfelvétel történik, majd $\frac{15}{8} V_1$ -től $2V_1$ -ig hőleadás.

Az ábrán láthatóak a különböző adiabaták barna színnel, illetve kék színnel a lineáris folyamatunk. Látható, hogy amíg egyre magasabban fekvő adiabatákat metsz át, addig hőfelvétel történik, majd a kiszámolt pont után egyre alacsonyabb adiabatákat metsz át, amikor is hőleadás történik.

Általánosan megfogalmazhatjuk, hogy a körfolyamat adiabatákkal vett érintőit kell megkeresni, és azokon a helyeken vált a körfolyamat hőfelvételtől, hőleadásra vagy fordítva.

